

**MATEMATICĂ**  
**SINTEZA MATERIEI**  
*clasa a IX-a*

**PREGĂTEȘTE-TE PENTRU**  
**BACALAUREAT**

*Învață toată materia rapid și eficient!*

<b>Introducere</b>	5
--------------------	---

---

## **Algebră**

Formule algebrice	7
Formule pentru sume	8
Partea întreagă a unui număr real	9
Partea fracționară a unui număr real	10
Modulul unui număr real	11
Ecuția de gradul al doilea	14
Semnul unei expresii de gradul al doilea	15
Descompunerea trinomului de gradul al doilea	16
Relațiile lui Viète	17
Progresii aritmetice	18
Progresii geometrice	21
Funcție	24
Proprietățile funcțiilor	29
Funcția de gradul întâi	39
Funcția de gradul al doilea	46

## **Geometrie**

Vectori în plan	59
Vector legat	59
Vector liber	60
Adunarea vectorilor	61
Scăderea vectorilor	64
Înmulțirea vectorilor cu scalari	65
Vectori într-un reper cartezian	66
Vectorul de poziție al unui punct	66
Coordonatele unui vector într-un reper cartezian	68
Modulul unui vector într-un reper cartezian	69
Vectorul de poziție al mijlocului unui segment	70

Produsul scalar a doi vectori	72
Unghiul a doi vectori	73
Vectori perpendiculari	74
Vectori coliniari	75

## ***Trigonometrie***

Funcții trigonometrice în triunghiul dreptunghic	76
Funcții trigonometrice pentru unghiuri uzuale	77
Rezolvarea triunghiului dreptunghic	78
Cercul trigonometric	78
Cadrane	79
Radiani	79
Funcții definite pe cercul trigonometric	80
Semnele funcțiilor trigonometrice	81
Formule trigonometrice	82
Funcții trigonometrice complementare	82
Reducerea la primul cadran	83
Formule pentru sumă și diferență	84
Formule pentru unghiul dublu	85
Formule pentru unghiul triplu	86
Formule pentru unghiul pe jumătate	87
Formule pentru transformarea sumelor în produse	88
Formule pentru transformarea produselor în sume	89
Relații între funcții trigonometrice	90

## ***Aplicații ale trigonometriei în geometrie***

Teorema cosinusului	91
Teorema sinusurilor	93
Aria triunghiului	94
Aria paralelogramului	96
Raza cercului circumscris unui triunghi	97
Raza cercului înscris într-un triunghi	98



## Formule algebrice

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(-a + b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(-a - b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

$$(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$$

$$(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$$

$$a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 = [(a + b)^2 - 2ab]^2 - 2a^2b^2$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc)$$

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = \frac{1}{2}[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(-a + b)^3 = -a^3 + 3a^2b - 3ab^2 + b^3$$

$$(-a - b)^3 = -a^3 - 3a^2b - 3ab^2 - b^3$$

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(c + a)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]$$



## Formule pentru sume

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1), n \in \mathbf{N}^*$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1), n \in \mathbf{N}^*$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2, n \in \mathbf{N}^*$$

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = \sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2, n \in \mathbf{N}^*$$

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \sum_{k=1}^n (2k-1)^2 = \frac{1}{3}n(4n^2-1), n \in \mathbf{N}^*$$

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3 = \sum_{k=1}^n (2k-1)^3 = n^2(2n^2-1), n \in \mathbf{N}^*$$

$$2 + 4 + 6 + \dots + (2n) = \sum_{k=1}^n (2k) = n(n+1), n \in \mathbf{N}^*$$

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (2n)^2 = \sum_{k=1}^n (2k)^2 = \frac{2}{3}n(n+1)(2n+1), n \in \mathbf{N}^*$$

$$2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + (2n)^3 = \sum_{k=1}^n (2k)^3 = 2n^2(n+1)^2, n \in \mathbf{N}^*$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}, n \in \mathbf{N}^*$$

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n \cdot (n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2), n \in \mathbf{N}^*$$

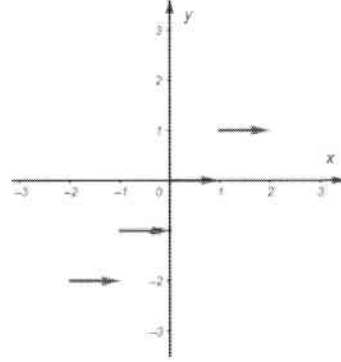


## Partea întreagă a unui număr real

Partea întreagă a numărului real  $x$ , notată  $[x]$ , este egală cu cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu  $x$ .

$$[x] \leq x \leq [x] + 1, x \in \mathbf{R}$$

$$[x] = \begin{cases} \dots & \dots \\ -2 & , -2 \leq x < -1 \\ -1 & , -1 \leq x < 0 \\ 0 & , 0 \leq x < 1 \\ 1 & , 1 \leq x < 2 \\ \dots & \dots \end{cases}$$



## Proprietățile părții întregi a unui număr real

- ✓  $[x] \in \mathbf{Z}, \forall x \in \mathbf{R}$
- ✓  $[x] = x \Leftrightarrow x \in \mathbf{Z}$
- ✓  $[x] + [y] \leq [x + y] \leq [x] + [y] + 1, \forall x, y \in \mathbf{R}$
- ✓  $[m + x] = m + [x], \forall x \in \mathbf{R}, \forall m \in \mathbf{Z}$
- ✓  $x, y \in \mathbf{R}, [y] \leq x < y \Rightarrow [x] = [y]$
- ✓ Pentru  $m \in \mathbf{Z}: [x] = m \Leftrightarrow x \in [m, m + 1)$
- ✓ Pentru  $m \in \mathbf{Z}: x, y \in [m, m + 1) \Leftrightarrow [x] = [y]$



## Exemple

1.  $[2] = 2, [2,6] = 2, [-2] = -2, [-2,6] = -3, [0] = 0$
2.  $[\frac{1}{2}] = 0, [\frac{3}{2}] = [1\frac{1}{2}] = 1, [-\frac{1}{2}] = -1, [-\frac{3}{2}] = [-1\frac{1}{2}] = -2$
3.  $1 < \sqrt{2} < 2 \Rightarrow [\sqrt{2}] = 1, -3 < -\sqrt{5} < -2 \Rightarrow [-\sqrt{5}] = -3$

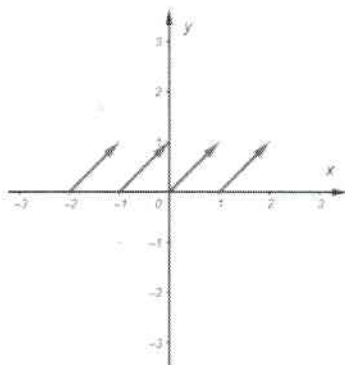


## Partea fracționară a unui număr real

Partea fracționară a numărului real  $x$ , notată  $\{x\}$ , este egală cu diferența dintre  $x$  și partea întreagă a lui  $x$ .

$$\{x\} = x - [x], x \in \mathbf{R}$$

$$\{x\} = \begin{cases} x + 2 & , -2 \leq x < -1 \\ x + 1 & , -1 \leq x < 0 \\ x & , 0 \leq x < 1 \\ x - 1 & , 1 \leq x < 2 \\ \dots & , \dots \end{cases}$$



## Proprietățile părții fracționare a unui număr real

- ✓  $\{x\} \in [0, 1), \forall x \in \mathbf{R}$
- ✓  $\{x\} = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbf{Z}$
- ✓  $\{m + x\} = m + \{x\}, \forall x \in \mathbf{R}, \forall m \in \mathbf{Z}$



## Exemple

1.  $\{2\} = 2 - [2] = 2 - 2 = 0, \{2,6\} = 2,6 - [2,6] = 2,6 - 2 = 0,6$
2.  $\{-2\} = -2 - [-2] = -2 - (-2) = -2 + 2 = 0$
3.  $\{-2,6\} = -2,6 - [-2,6] = -2,6 - (-3) = -2,6 + 3 = 0,4$
4.  $\left\{\frac{1}{3}\right\} = \frac{1}{3} - \left[\frac{1}{3}\right] = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$
5.  $\left\{-\frac{1}{3}\right\} = -\frac{1}{3} - \left[-\frac{1}{3}\right] = -\frac{1}{3} - (-1) = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$



## Modulul unui număr real (valoare absolută)

$$x \in \mathbf{R}, |x| = \begin{cases} -x & , x < 0 \\ x & , x \geq 0 \end{cases}$$



## Proprietățile modulului unui număr real

$$|x| \geq 0, \forall x \in \mathbf{R}$$

$$|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$|x| = |-x|, \forall x \in \mathbf{R}$$

$$|x|^2 = x^2, \forall x \in \mathbf{R}$$

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|, \forall x, y \in \mathbf{R}$$

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}, \forall x, y \in \mathbf{R}, y \neq 0$$

$$|x + y| \leq |x| + |y|, \forall x, y \in \mathbf{R}$$

$$||x| - |y|| \leq |x - y|, \forall x, y \in \mathbf{R}$$

$$|x| = \max\{-x, x\}, \forall x \in \mathbf{R}$$

$$\max\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$$

$$\min\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$$



## Exemple

1. Să se compare numerele  $a, b, c$ , unde

$$a = \left| -1, (3) + \frac{1}{6} \right| = \left| -1\frac{3}{9} + \frac{1}{6} \right| = \left| -1\frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right| = \left| -\frac{4}{3} + \frac{1}{6} \right| = \left| -\frac{7}{6} \right| = \frac{7}{6}$$

$$b = \left| 0,4 - 1\frac{1}{5} \right| = \left| \frac{4}{10} - \frac{6}{5} \right| = \left| \frac{2}{5} - \frac{6}{5} \right| = \left| -\frac{4}{5} \right| = \frac{4}{5}$$

$$c = \left| 2,1(3) - \frac{4}{3} \right| = \left| 2\frac{13-1}{90} - \frac{4}{3} \right| = \left| 2\frac{2}{15} - \frac{4}{3} \right| = \left| \frac{32}{15} - \frac{20}{15} \right| = \left| \frac{4}{5} \right| = \frac{4}{5}$$

$$a = \frac{7}{6} = \frac{35}{30}, b = \frac{4}{5} = \frac{24}{30}, c = \frac{4}{5} = \frac{24}{30} \Rightarrow a > b = c$$

2. Să se arate că expresia  $E(x) = |4x - 8| - 2|4 - 2x|$  este constantă oricare ar fi numărul real  $x$ .

$$E(x) = |4(x - 2)| - 2|2(x - 2)| = 4|x - 2| - 4|x - 2| = 0$$